# 相加平均 $\geqq$ 相乗平均の公式を証明をしてみよう

---

(1)　$e^x \geqq x+1$ を証明せよ。

(2)　$e^{\frac{a_i}{m}-1} \geqq \dfrac{a_i}{m}$ を示せ。

(3)　$m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$ とおくとき，$m^n \geqq a_1a_2a_3\cdots a_n$ を示せ。

(4)　$\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ を示せ。

---

(1)

$$f(x) = e^x - (x+1) \text{ とおく}$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

これより, 次の増減をえる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

よって

$$f(x) \geqq 0$$

すなわち

$$e^x \geqq x+1$$

(2) (1) において $x = \frac{a_1}{m} - 1$ を代入して、

$$e^{\frac{a_i}{m}-1} \geqq \frac{a_i}{m} - 1 + 1$$

$$\therefore \quad e^{\frac{a_i}{m}-1} \geqq \frac{a_i}{m}$$

(3) (2) より,$i = 1, 2, 3, \cdots, n$ を代入したものを辺々かけて,

$$e^{(\frac{a_1}{m}-1)+(\frac{a_2}{m}-1)+\cdots+(\frac{a_n}{m}-1)} \geqq \frac{a_1}{m}\frac{a_2}{m}\cdots\frac{a_n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^0 \geqq \frac{a_1a_2\cdots a_n}{m^n}$$

$$\therefore \quad m^n \geqq a_1a_2a_3\cdots a_n$$

(4) (3) より,

$$m \geqq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$